

## ESERCIZIO 1

Fissata arbitrariamente una terna 1 (rif. assoluto), la sequenza di trasformazioni seguente definisce la configurazione della terna 2 rispetto alla terna 1:

1. Rotazione attorno all'asse **z assoluto** di un angolo **-90°**
2. Rotazione attorno all'asse **x corrente** di un angolo **90°**
3. Rotazione attorno all'asse **y assoluto** di un angolo **-90°**
4. Traslazione lungo **assi correnti** definita dal vettore:  $[-2 \ 3 \ 1]^T$

Si richiede di:

- a. Definire la trasformazione complessiva  $T_{21}$  come prodotto di matrici di trasformazione, ciascuna corrispondente ad una delle trasformazioni elementari sopra riportate
- b. Rappresentare graficamente la terna 2 rispetto alla terna 1
- c. Derivare la matrice di trasformazione  $T_{21}$  direttamente dal disegno
- d. Esprimere  $R_{21}$  secondo la notazione di Eulero Z-Y'-Z'' e secondo la notazione di Cardano X-Y-Z

### Traccia dello svolgimento:

- a. Si scrive il prodotto delle matrici di rototraslazione corrispondenti alle trasformazioni 1-2-3-4, ricordando che ciascuna trasformazione definita rispetto alla terna mobile deve essere inserita a DX delle precedenti, mentre ciascuna trasformazione definita rispetto alla terna assoluta deve essere inserita a SX.

Infatti si può pensare ciascuna matrice di trasformazione T come un descrittore della configurazione relativa tra due terne, dal momento che le colonne rappresentano in coordinate omogenee i versori e l'origine della terna successiva rispetto alla terna precedente: in questo modo, moltiplicare a DX equivale ad "inserire" una nuova terna, traslata e ruotata rispetto agli assi correnti.

Del resto, una matrice T può anche essere pensata come un operatore che trasforma punti e vettori. Per fissare le idee, si supponga che una terna  $\{2\}$  sia definita rispetto ad una terna  $\{1\}$  tramite tre rotazioni su assi fissi:

$$\{1\} \xrightarrow{R_x(\alpha)} \{1\}' \xrightarrow{R_y(\beta)} \{1\}'' \xrightarrow{R_z(\gamma)} \{2\}$$

Indicate con  $\{P\}_1$  le componenti di un vettore **P** nel sistema  $\{1\}$ , si supponga di voler ricavare  $\{P\}_2$ : partendo dalle coordinate di **P** in  $\{1\}$ , si può applicare al vettore la trasformazione inversa rispetto a quella subita dalla terna per andare da  $\{1\}$  a  $\{2\}$ . Il vettore subirà quindi una rotazione  $R_z(-\gamma)$ , seguita da una rotazione  $R_y(-\beta)$ , seguita da una rotazione  $R_x(-\alpha)$ , ed avrà nel sistema  $\{1\}$  le stesse coordinate di  $\{P\}_2$ , in formule:

$$\{P\}_2 = R_x(-\alpha) \cdot R_y(-\beta) \cdot R_z(-\gamma) \{P\}_1$$

Invertendo la precedente relazione si ottiene:

$$\{P\}_1 = R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha) \{P\}_2$$

Dalla quale si evince che:

$$R_{21} = R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha)$$

Dunque, ogniqualvolta si ruoti attorno ad assi fissi, la rotazione complessiva si determina scrivendo un prodotto di matrici in cui ciascuna rotazione elementare va scritta a SX di quelle che la precedono. Utilizzando le coordinate omogenee, questo ragionamento è immediatamente generalizzabile al caso di generiche trasformazioni composte.

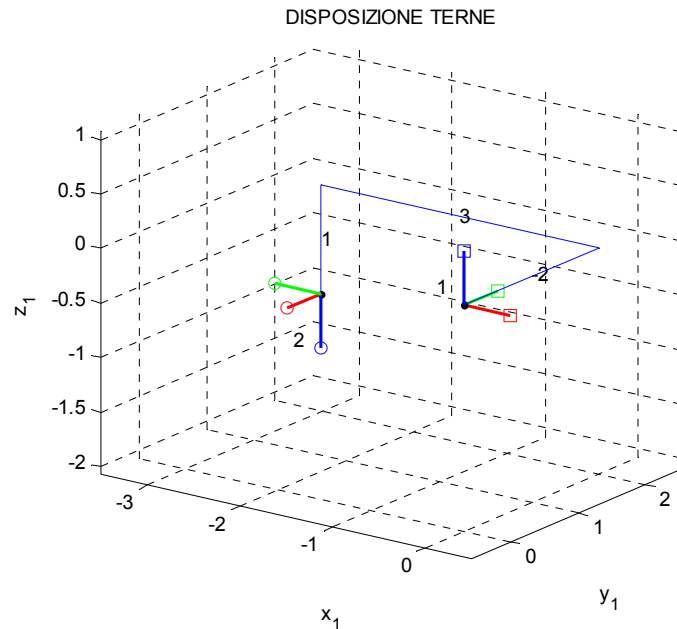
Nel caso proposto, la sequenza di trasformazioni risulta pertanto:

$$T_{21} = T_{R_y}(-90) \cdot T_{R_z}(-90) \cdot T_{R_x}(90) \cdot T_d$$

In cui  $T_{R_y}$ ,  $T_{R_z}$ , e  $T_{R_x}$  sono rotazioni elementari attorno agli assi y, z x e  $T_d$  è la seguente matrice di traslazione:

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- b. È conveniente derivare la configurazione della terna 2 partendo da una terna inizialmente coincidente con 1, e applicando agli assi mobili le trasformazioni descritte nell'espressione ricavata al punto precedente, che deve essere letta da SX verso DX. (In figura: x=rosso; y=verde; z=blu)



- c. Le prime tre colonne della matrice richiesta contengono in coordinate omogenee la descrizione dei vettori del frame 2 rispetto al frame 1, mentre la quarta colonna contiene le coordinate dell'origine della seconda terna:

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \{i_2\}_1 & \{j_2\}_1 & \{k_2\}_1 & \{O_2\}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notando che  $\{i_2\}_1 = -\{j_1\}_1$ ,  $\{j_2\}_1 = -\{i_1\}_1$ ,  $\{k_2\}_1 = -\{k_1\}_1$ ,  $\{O_2\}_1 = \{-3 \ 2 \ -1\}'$ , si costruisce immediatamente la matrice:

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- d. I tre angoli di Eulero (Z-Y'-Z'') si possono ottenere mediante il seguente ragionamento:

- la prima rotazione ( $\alpha$  su  $Z_1$ ) deve portare l'asse  $Y_1$  sulla normale comune a  $Z_1$  e  $Z_2$ ;
- la seconda rotazione ( $\beta$  su  $Y'$ ) deve portare l'asse  $Z'$  (che coincide con  $Z_1$ ) su  $Z_2$ ;
- la terza rotazione ( $\gamma$  su  $Z'' \equiv Z_2$ ) deve allineare gli assi  $X''$  e  $Y''$  con quelli della terna 2;

Se  $Z_1$  e  $Z_2$  non sono collineari, allora esistono 2 angoli che soddisfano la prima condizione, corrispondenti a versi opposti di  $Y_1$ :  $\alpha_A$  e  $\alpha_B = (\alpha_A + 180)$ . La rotazione successiva deve allineare  $Z_1$  a  $Z_2$ : poiché gli assi di rotazione  $Y'$  sono opposti nei due casi ma  $Z_1$  è lo stesso, saranno opposti anche i corrispondenti angoli:  $\beta_B = -\beta_A$ . L'ultima rotazione avviene attorno al medesimo asse  $Z_2$ , ma porta assi  $Y'$  opposti a sovrapporsi a  $Y_2$ , dunque:  $\gamma_B = (\gamma_A + 180)$ .

Se  $Z_1$  e  $Z_2$  sono allineati, esistono  $\infty^1$  scelte possibili, infatti qualunque versore del piano di normale  $Z_1$  ( $Z_2$ ) può essere un  $Y'$  valido. Si supponga che  $Z_1$  e  $Z_2$  siano equiversi, allora dev'essere  $\beta = 0$  e gli angoli  $\alpha$  e  $\gamma$

agiscono sullo stesso asse: la rotazione complessiva equivale a  $R_z(\alpha+\gamma)$ , dunque risulta fissata solamente la somma di  $\alpha$  e  $\gamma$ . Al contrario, se  $Z_1$  e  $Z_2$  sono opposti, dev'essere  $\beta=180^\circ$  e  $\alpha$  e  $\gamma$  agiscono su assi opposti: la rotazione complessiva equivale a  $R_z(\alpha-\gamma) \cdot R_y(180)$ , dunque risulta fissata solamente la differenza tra  $\alpha$  e  $\gamma$ . L'esercizio propone l'ultima situazione descritta. Ad esempio, ponendo  $\alpha=0$ , si ottiene la soluzione:

$$R_{21} = R_z(0) \cdot R_y(180) \cdot R_z(-90)$$

Da cui si ricava che  $\alpha-\gamma=90^\circ$  e quindi il set completo di soluzioni è rappresentato da:

$$R_{21} = R_z(\gamma+90) \cdot R_y(180) \cdot R_z(\gamma), \quad \gamma \in R$$

Da quanto precisato in precedenza risulta chiaro che la notazione di Cardano (X-Y-Z) porta alla stessa sequenza di rotazioni elementari della notazione di Eulero (Z-Y'-X''). Sfruttando questo fatto, i tre angoli di Cardano si possono determinare mediante un procedimento simile a quello già descritto:

- la prima rotazione ( $\gamma$  su  $Z_1$ ) deve portare l'asse  $Y_1$  sulla normale comune a  $Z_1$  e  $X_2$  (ciò assicura che il piano di normale  $Y'$  contenga  $X'$  e  $X_2$ );
- la seconda rotazione ( $\beta$  su  $Y'$ ) deve portare l'asse  $X'$  su  $X_2$ ;
- la terza rotazione ( $\alpha$  su  $X'' \equiv X_2$ ) deve allineare gli assi  $Y''$  e  $Z''$  con quelli della terna 2;

Se  $Z_1$  e  $X_2$  non sono allineati, la prima rotazione può essere duplice:  $\gamma_B = (\gamma_A + 180)$ . Si ottengono nei due casi assi  $Y'$  e  $X'$  rispettivamente opposti, cosicché i corrispondenti angoli  $\beta$ , necessari ad allineare gli assi  $X'$  ad  $X_2$ , risultano:  $\beta_B = 180 - \beta_A$ . L'ultima rotazione avviene attorno al medesimo asse  $X_2$ , ma porta assi  $Y'' \equiv Y'$  opposti a sovrapporsi a  $Y_2$ , dunque:  $\alpha_B = (\alpha_A + 180)$ .

Se  $Z_1$  e  $X_2$  sono allineati, esistono  $\infty^1$  scelte possibili, infatti qualunque versore del piano di normale  $Z_1$  ( $X_2$ ) può essere un  $Y'$  valido. Se  $Z_1$  e  $X_2$  sono equiversi, allora dev'essere  $\beta = -90^\circ$  e gli angoli  $\gamma$  e  $\alpha$  agiscono sullo stesso asse: la rotazione complessiva equivale a  $R_z(\gamma + \alpha) \cdot R_y(-90)$  e risulta fissata solamente la somma di  $\alpha$  e  $\gamma$ . Al contrario, se  $Z_1$  e  $X_2$  sono opposti, dev'essere  $\beta = 90^\circ$  e  $\gamma$  e  $\alpha$  agiscono su assi opposti: la rotazione complessiva equivale a  $R_z(\gamma - \alpha) \cdot R_y(90)$  e risulta fissata solamente la differenza tra  $\alpha$  e  $\gamma$ .

Nel caso proposto,  $Z_1$  ed  $X_2$  sono distinti e l'applicazione del metodo descritto porge i risultati seguenti:

$$R_{21} = R_z(-90) \cdot R_y(0) \cdot R_x(180)$$

$$R_{21} = R_z(90) \cdot R_y(180) \cdot R_x(0)$$

## ESERCIZIO 2

Fissata arbitrariamente una terna 1 (rif. assoluto), la sequenza di trasformazioni seguente definisce la configurazione della terna 2 rispetto alla terna 1:

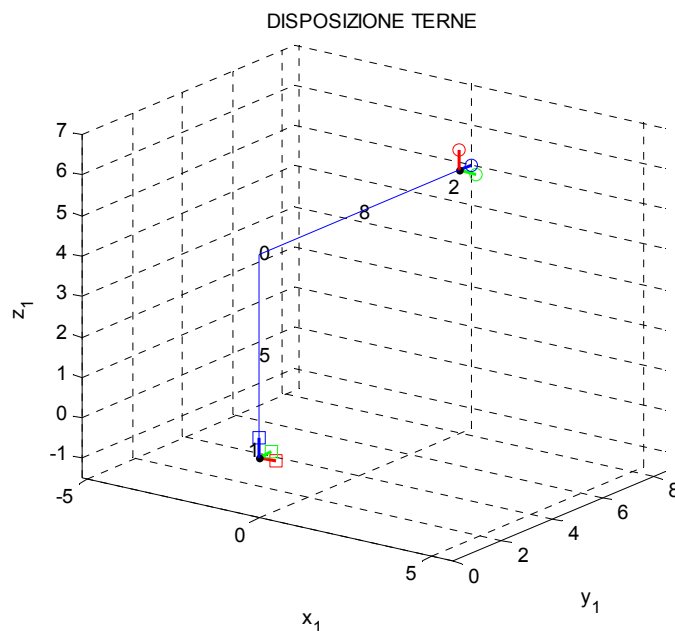
1. Rotazione attorno all'asse **x assoluto** di un angolo **180°**
2. Rotazione attorno all'asse **y assoluto** di un angolo **-90°**
3. Rotazione attorno all'asse **z assoluto** di un angolo **90°**
4. Traslazione lungo **assi correnti** definita dal vettore:  $[5 \ 0 \ 8]^T$

Si richiede di:

- a. Definire la trasformazione complessiva  $T_{21}$  come prodotto di matrici di trasformazione, ciascuna corrispondente ad una delle trasformazioni elementari sopra riportate
- b. Rappresentare graficamente la terna 2 rispetto alla terna 1
- c. Derivare la matrice di trasformazione  $T_{21}$  direttamente dal disegno
- d. Esprimere  $R_{21}$  secondo la notazione di Eulero Z'-Y'-Z'' e secondo la notazione di Cardano X-Y-Z

**Soluzione:**

- a.  $T_{21} = T_{Rz}(90) \cdot T_{Ry}(-90) \cdot T_{Rx}(180) \cdot T_d$
- b. (x=rosso; y=verde; z=blu)



c. 
$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.

Notazione di Eulero:  $R_{21} = R_z(90) \cdot R_y(90) \cdot R_x(180)$   
 $R_{21} = R_z(-90) \cdot R_y(-90) \cdot R_x(0)$

Notazione di Cardano:  $R_{21} = R_z(270 - \alpha) \cdot R_y(-90) \cdot R_x(\alpha)$ ,  $\alpha \in R$

### ESERCIZIO 3

Fissata arbitrariamente una terna 1 (rif. assoluto), la sequenza di trasformazioni seguente definisce la configurazione della terna 2 rispetto alla terna 1:

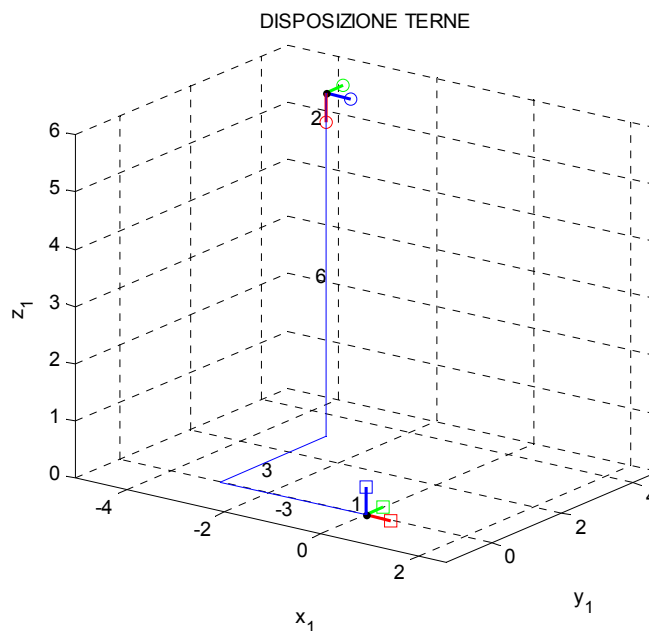
1. Rotazione attorno all'asse **x assoluto** di un angolo  $-90^\circ$
2. Rotazione attorno all'asse **z corrente** di un angolo  $90^\circ$
3. Rotazione attorno all'asse **z assoluto** di un angolo  $-90^\circ$
4. Traslazione lungo **assi assoluti** definita dal vettore:  $[-3 \ 3 \ 6]'$

Si richiede di:

- a. Definire la trasformazione complessiva  $T_{21}$  come prodotto di matrici di trasformazione, ciascuna corrispondente ad una delle trasformazioni elementari sopra riportate
- b. Rappresentare graficamente la terna 2 rispetto alla terna 1
- c. Derivare la matrice di trasformazione  $T_{21}$  direttamente dal disegno
- d. Esprimere  $R_{21}$  secondo la notazione di Eulero Z-Y'-Z'' e secondo la notazione di Cardano X-Y-Z

#### Soluzione:

- a.  $T_{21} = T_d \cdot T_{Rz}(-90) \cdot T_{Rx}(-90) \cdot T_{Rz}(90)$
- b. (x=rosso; y=verde; z=blu)



$$c. T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.

Notazione di Eulero:

$$R_{21} = R_z(0) \cdot R_y(90) \cdot R_z(0)$$

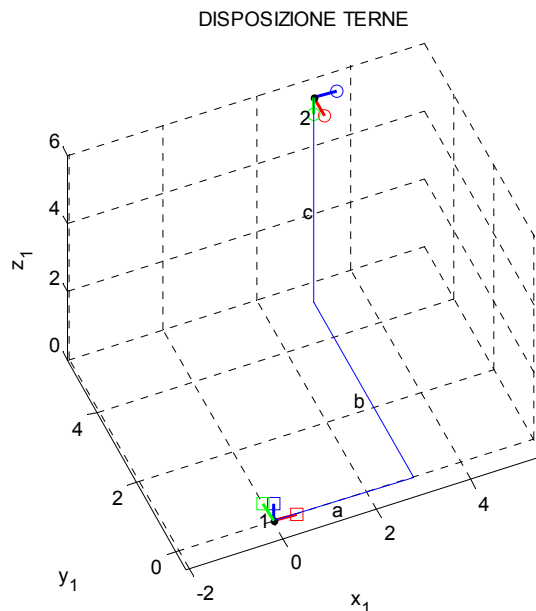
$$R_{21} = R_z(180) \cdot R_y(-90) \cdot R_z(180)$$

Notazione di Cardano:  $R_{21} = R_z(\alpha) \cdot R_y(90) \cdot R_x(\alpha), \quad \alpha \in R$

## ESERCIZIO 4

Si considerino le terne di riferimento riportate in figura (x=rosso; y=verde; z=blu):

- Derivare la matrice di trasformazione  $T_{21}$  direttamente dal disegno
- Esprimere  $R_{21}$  secondo la notazione di Eulero Z-Y'-Z'' e secondo la notazione di Cardano X-Y-Z



**Soluzione:**

$$a. \quad T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

Notazione di Eulero:

$$R_{21} = R_z(0) \cdot R_y(90) \cdot R_z(-90)$$

$$R_{21} = R_z(180) \cdot R_y(-90) \cdot R_z(90)$$

Notazione di Cardano:

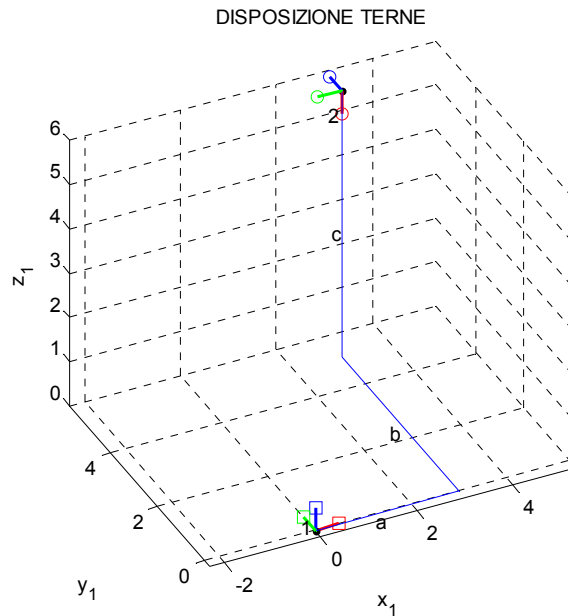
$$R_{21} = R_z(-90) \cdot R_y(0) \cdot R_x(-90)$$

$$R_{21} = R_z(90) \cdot R_y(180) \cdot R_x(90)$$

## ESERCIZIO 5

Si considerino le terne di riferimento riportate in figura (x=rosso; y=verde; z=blu):

- Derivare la matrice di trasformazione  $T_{21}$  direttamente dal disegno
- Esprimere  $R_{21}$  secondo la notazione di Eulero Z-Y'-Z'' e secondo la notazione di Cardano X-Y-Z



**Soluzione:**

$$a. \quad T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ -1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

Notazione di Eulero:  $R_{21} = R_z(90) \cdot R_y(90) \cdot R_z(0)$   
 $R_{21} = R_z(-90) \cdot R_y(-90) \cdot R_z(180)$

Notazione di Cardano:  $R_{21} = R_z(\gamma) \cdot R_y(90) \cdot R_x(\gamma - 90)$

## ESERCIZIO 6

Fissata arbitrariamente una terna 1 (rif. assoluto), la sequenza di trasformazioni seguente definisce la configurazione della terna 2 rispetto alla terna 1:

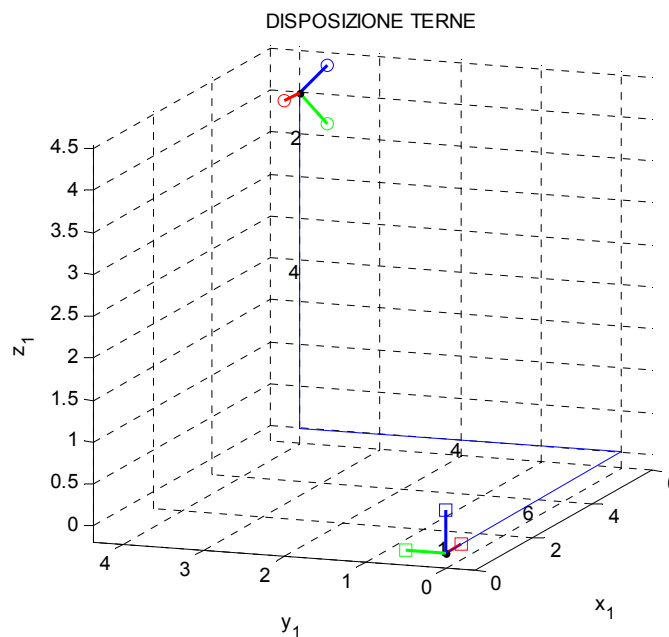
1. Rotazione attorno all'asse **z assoluto** di un angolo **135°**
2. Rotazione attorno all'asse **y corrente** di un angolo **-90°**
3. Rotazione attorno all'asse **y assoluto** di un angolo **-90°**
4. Traslazione lungo **assi assoluti** definita dal vettore:  $[6 \ 4 \ 4]^T$

Si richiede di:

- a. Definire la trasformazione complessiva  $T_{21}$  come prodotto di matrici di trasformazione, ciascuna corrispondente ad una delle trasformazioni elementari sopra riportate
- b. Rappresentare graficamente la terna 2 rispetto alla terna 1
- c. Derivare la matrice di trasformazione  $T_{21}$  direttamente dal disegno
- d. Esprimere  $R_{21}$  secondo la notazione di Eulero Z-Y'-Z'' e secondo la notazione di Cardano X-Y-Z

**Soluzione:**

- a.  $T_{21} = T_d \cdot T_{Ry}(-90) \cdot T_{Rz}(135) \cdot T_{Ry}(-90)$
- b. (x=rosso; y=verde; z=blu)



$$c. \quad T_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 4 \\ -1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.

Notazione di Eulero:

$$R_{21} = R_z(-90) \cdot R_y(45) \cdot R_z(-90)$$

$$R_{21} = R_z(90) \cdot R_y(-45) \cdot R_z(90)$$

Notazione di Cardano:

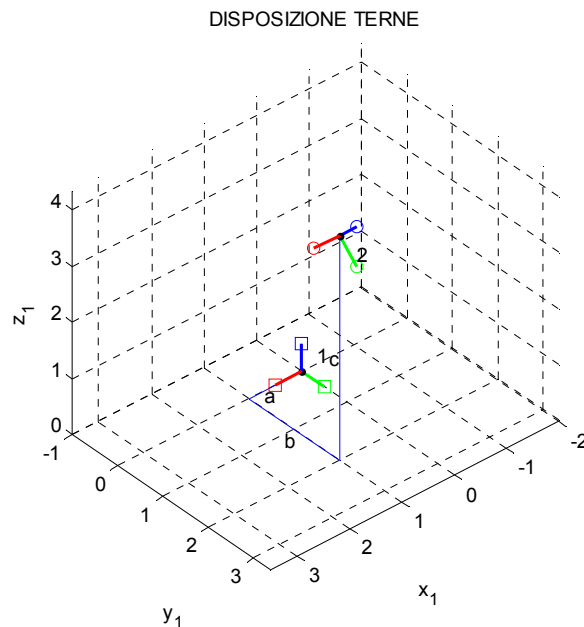
$$R_{21} = R_z(180) \cdot R_y(0) \cdot R_x(-45)$$

$$R_{21} = R_z(0) \cdot R_y(180) \cdot R_x(135)$$

## ESERCIZIO 7

Si considerino le terne di riferimento riportate in figura (x=rosso; y=verde; z=blu):

- Derivare la matrice di trasformazione  $T_{21}$  direttamente dal disegno
- Esprimere  $R_{21}$  secondo la notazione di Eulero Z-Y'-Z'' e secondo la notazione di Cardano X-Y-Z



**Soluzione:**

$$a. \quad T_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & a \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & b \\ -1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

Notazione di Eulero:

$$R_{21} = R_z(-90) \cdot R_y(-45) \cdot R_z(90)$$

$$R_{21} = R_z(90) \cdot R_y(45) \cdot R_z(-90)$$

Notazione di Cardano:

$$R_{21} = R_z(0) \cdot R_y(0) \cdot R_x(-45)$$

$$R_{21} = R_z(180) \cdot R_y(180) \cdot R_x(135)$$